رسم دایره

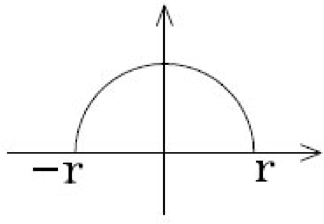
فرمول کلی دایره:

$x^2+y^2=r^2$ (مرکز دایره، مبدا مختصات می‌باشد.)

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ (مرکز دایره، نقطه‌ی (x_0,y_0) می‌باشد.) $y=\sqrt{r^2-x^2}$

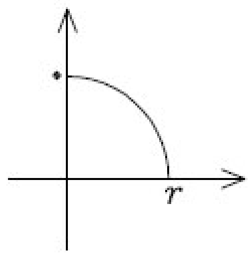
رسم دایره با استفاده از نصف دایره:

```
void Circle(int xCenter, int yCenter, int r)
{
int x,y;
float yr;
for(x=-r;x<=r;x++)
{
 yr=sqrt(r*r-x*x); // y = √(r² − x²)
 y=Round(yr);
 setpixel(x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(x+xCenter,-y+yCenter);
} //end of for loop.
} //end of Circle function.
```

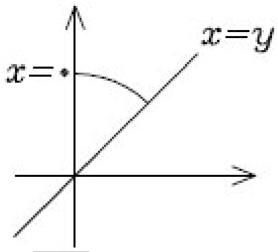


رسم دایره با استفاده از یک چهارم دایره:

```
void Circle(int xCenter, int yCenter, int r)
{
int x,y;
float yr;
for(x=0;x<=r;x++)
{
 yr=sqrt(r*r-x*x); // y = √(r² − x²)
 y=Round(yr);
 setpixel(x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,-y+yCenter);
} //end of for loop.
} //end of Circle function.
```



رسم دایره با استفاده از یک هشتم دایره:




```
void Circle(int xCenter, int yCenter, int r)
{
int x,y;
float yr;
for(x=0;x<=y;x++)
{
 yr=sqrt(r*r-x*x); // y = √(r² − x²)
 y=Round(yr);
 setpixel(x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(y+xCenter,x+yCenter);
 setpixel(y+xCenter,-x+yCenter);
 setpixel(-y+xCenter,x+yCenter);
 setpixel(-y+xCenter,-x+yCenter);
} //end of for loop.
} //end of Circle function.
```

الگوریتم برزنهام رسم دایره:

» برزنهام برای رسم دایره از یک هشتم دایره استفاده میکند.

$x^2+y^2=r^2$

$x^2+y^2-r^2=۰$

$f(x,y)=x^2+y^2-r^2$ ➔ تابع خطا

$f(x,y) > ۰$ (x,y) خارج دایره , انتخاب P_2

$f(x,y) < ۰$ (x,y) داخل دایره , انتخاب P_1

$f(x,y) = ۰$ (x,y) روی دایره , فرقی ندارد کدام انتخاب شود.

P (x,y)	P_1 (x+1,y)	P_{11} (x+2,y)
	P_2 (x+1,y-1)	P_{12} P_{21} (x+2,y-1)
		P_{22} (x+2,y-2)

محاسبه ثابت‌های برزنهام دایره:

توضیح: برای محاسبه ثابت‌ها، ابتدا نقطه وسط P_1 و P_2 را پیدا میکنیم و سپس در تابع خطا جاگذاری می‌کنیم!

$$mid(P_1,P_2) = \left(\frac{(x+1)+(x+1)}{2}, \frac{y+(y-1)}{2}\right) = \left(x+1, y-\tfrac{1}{2}\right)$$

$f(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$ ➔ *تابع خطا*

$f(midx, midy) = \boxed{(x+1)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 - r^2}$ ➔ *ثابت اول*

اگر P_1 انتخاب شود:

$$mid(P_{11},P_{12}) = \left(\frac{(x+2)+(x+2)}{2}, \frac{y+(y-1)}{2}\right) = \left(x+2, y-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$f(midx, midy) = (x+2)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 - r^2 = \big((x+1)+1\big)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 - r^2$$

$$= \underbrace{(x+1)^2}_{} + 2(x+1) + 1 + \underbrace{\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2}_{} \underbrace{-r^2}_{}$$

$\boxed{d_{new} = d_{old} + 2x + 3}$ ➔ *ثابت دوم (بر حسب ثابت اول)*

اگر P_2 انتخاب شود:

$$mid(P_{21},P_{22}) = \left(\frac{(x+2)+(x+2)}{2}, \frac{(y-1)+(y-2)}{2}\right) = \left(x+2, y-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$f(midx, midy) = (x+2)^2 + \left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2 - r^2$$

$$= \big((x+1)+1\big)^2 + \left(\left(y-\tfrac{1}{2}\right)-1\right)^2 - r^2$$

$$= \underbrace{(x+1)^2}_{} + 2(x+1) + 1 + \underbrace{\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2}_{} - 2\left(y-\tfrac{1}{2}\right) + 1 \underbrace{-r^2}_{}$$

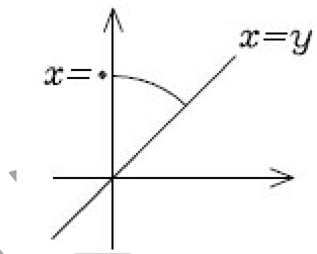
$\boxed{d_{new} = d_{old} + 2(x-y) + 5}$ ➔ *ثابت سوم (بر حسب ثابت اول)*

$$d = (x+1)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 - r^2 = \underbrace{x^2}_{} + 2x + 1 + \underbrace{y^2}_{} - y + \frac{1}{2} \underbrace{-r^2}_{}$$

$d = f(x,y) + 2x - y + \frac{5}{4}$ ➔ $f(x,y) = 0$ ➔ $d = 2x - y + \frac{5}{4}$

$d = f(0,r) = 2(0) - r + (1 + \tfrac{1}{4})$ ➔ *صرف نظر از* $\tfrac{1}{4}$ ➔ $\boxed{d = -r + 1 = 1 - r}$ ➔ *ثابت اول*

الگوریتم برزنهام رسم دایره:




```
void BresenHamCircle(int xCenter, int yCenter, int r)
{
int x,y,d;
d=1-r;  //ثابت اول
x=0;
y=r;
plot-8points(x,y,xCenter,yCenter);
while(x<=y)
{
 if(d>0)  //  یعنی P2 انتخاب شود
 {
  d=d+2*(x-y)+5;  //ثابت سوم
  x++;
  y--;
 }
 else //  یعنی P1 انتخاب شود
 {
  d=d+2*x+3; // ثابت دوم
  x++;
 }
 plot-8points(x,y,xCenter,yCenter);
} //end of while loop.
} //end of function.

void plot-8points(int x, int y, int xCenter, int yCenter)
{
 setpixel(x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(y+xCenter,x+yCenter);
 setpixel(y+xCenter,-x+yCenter);
 setpixel(-y+xCenter,x+yCenter);
 setpixel(-y+xCenter,-x+yCenter);
} //end of function.
```

بهینگی الگوریتم برزنهام دایره:

» می‌خواهیم ضرب‌ها را به جمع تبدیل کنیم. (تفریق نوعی جمع است.)

» P_1 و P_2 را به جای P، نقطه‌ی شروع قرار می‌دهیم.

$$d_{new} = d_{old} + \underbrace{2x+3}_{d1}$$

$$d_{new} = d_{old} + \underbrace{2(x-y)+5}_{d2}$$

اگر P_1 انتخاب شود:

$$d_1(x+1,y) = 2(x+1)+3 = 2x+3+2$$

تغییرات ثابت دوم در هر بار پیشرفت رسم دایره

$$d_2(x+1,y) = 2\big((x+1)-y\big)+5 = 2(x-y)+5+2$$

تغییرات ثابت سوم در هر بار پیشرفت رسم دایره

اگر P_2 انتخاب شود:

$$d_1(x+1,y-1) = 2(x+1)+3 = 2x+3+2$$

تغییرات ثابت دوم در هر بار پیشرفت رسم دایره

$$d_2(x+1,y-1) = 2\big((x+1)-(y-1)\big)+5 = 2(x-y)+5+4$$

تغییرات ثابت سوم در هر بار پیشرفت رسم دایره

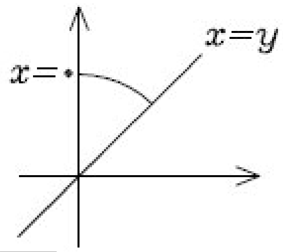
حال P_1 و P_2 را به جای P، نقطه‌ی شروع قرار می‌دهیم و *(0,r)* را جایگذاری می‌کنیم:

$$d_1(x,y) = 2x+3$$
$$d_1(0,r) = 2(0)+3 = \boxed{3}$$ ➔ *ثابت دوم*

$$d_2(x,y) = 2(x-y)+5$$
$$d_2(0,r) = 2(0-r)+5 = \boxed{-2r+5}$$ ➔ *ثابت سوم*

نکته: *ثابت اول تغییری نخواهد کرد!*

الگوریتم بهینه برزنهام رسم دایره:

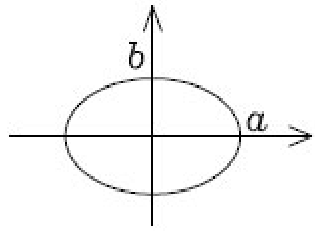



```
void BresenHamCircle2(int xCenter, int yCenter, int r)
{
int x,y,d,d1,d2;
d=1-r;  //ثابت اول
d1=3;
d2=-2*r+5;
x=0;
y=r;
plot-8points(x,y,xCenter,yCenter);
while(x<=y)
{
 if(d>0)  //  یعنی P2 انتخاب شود
 {
  d=d+d2;
  d1=d1+2;
  d2=d2+4;
  x++;
  y--;
 }
 else //  یعنی P1 انتخاب شود
 {
  d=d+d1;
  d1=d1+2;
  d2=d2+2;
  x++;
 }
 plot-8points(x,y,xCenter,yCenter);
} //end of while loop.
} //end of function.

void plot-8points(int x, int y, int xCenter, int yCenter)
{
 setpixel(x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(y+xCenter,x+yCenter);
 setpixel(y+xCenter,-x+yCenter);
 setpixel(-y+xCenter,x+yCenter);
 setpixel(-y+xCenter,-x+yCenter);
} //end of function.
```

رسم بیضی

فرمول کلی بیضی:



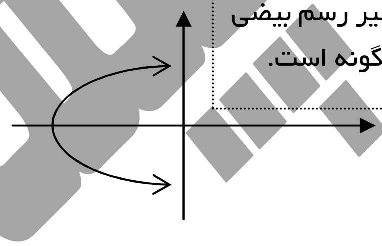
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \rightarrow \boxed{y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

رسم بیضی با استفاده از نصف بیضی:

```
void Circle(int xCenter, int yCenter, int a, int b)
{
int x,y;
float yr;
for(x=-a;x<=a;x++)
{
 yr=b*sqrt(1.0-(float)((x*x)/(a*a)));
 y=Round(yr);
 setpixel(x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(x+xCenter,-y+yCenter);
} //end of for loop.
} //end of Circle function.
```

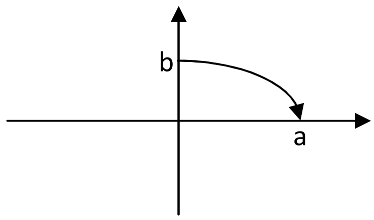
± را پیاده‌سازی می‌کند.



مسیر رسم بیضی اینگونه است.

رسم بیضی با استفاده از یک چهارم بیضی:

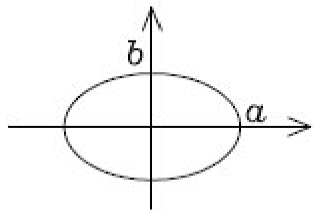
```
void Circle(int xCenter, int yCenter, int a, int b)
{
int x,y;
float yr;
for(x=0;x<=a;x++)
{
 yr=b*sqrt(1.0-(float)((x*x)/(a*a)));
 y=Round(yr);
 setpixel(x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,-y+yCenter);
} //end of for loop.
} //end of Circle function.
```



الگوریتم برزنهام رسم بیضی:

» برزنهام برای رسم بیضی از یک چهارم بیضی استفاده میکند.

» دلیل اصلی استفاده از برزنهام حذف محاسبات اعشاری است!



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ➔ معادله‌ی بیضی

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = ۰$

$f(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$ ➔ تابع خطا

$f(x,y) > ۰$ (x,y) خارج بیضی , انتخاب P_2

$f(x,y) < ۰$ (x,y) داخل بیضی , انتخاب P_1

$f(x,y) = ۰$ (x,y) روی بیضی , فرقی ندارد کدام انتخاب شود.

P (x,y)	P_1 $(x+1,y)$	P_{11} $(x+2,y)$
	P_2 $(x+1,y-1)$	P_{12} P_{21} $(x+2,y-1)$
		P_{22} $(x+2,y-2)$

محاسبه ثابت‌های برزنهام بیضی:

توضیح: برای محاسبه ثابت‌ها، ابتدا نقطه وسط P_1 و P_2 را پیدا می‌کنیم و سپس در تابع خطا جاگذاری می‌کنیم!

$$mid(P_1,P_2) = \left(\frac{(x+1)+(x+1)}{2}, \frac{y+(y-1)}{2}\right) = \left(x+1, y-\tfrac{1}{2}\right)$$

$f(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$ ➔ *تابع خطا*

$f(midx, midy) = \boxed{b^2(x+1)^2 + a^2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 - a^2b^2}$ ➔ *ثابت اول*

اگر $d<0$ و P_1 انتخاب شود:

$$mid(P_{11},P_{12})=\left(\frac{(x+2)+(x+2)}{2},\frac{y+(y-1)}{2}\right)=\left(x+2,y-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$f(midx,midy)=b^2(x+2)^2+a^2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2-a^2b^2$$

$$=b^2\big((x+1)+1\big)^2+a^2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2-a^2b^2$$

$$=\underbrace{b^2(x+1)^2}+b^2(2(x+1)+1)+\underbrace{a^2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2}\underbrace{-a^2b^2}$$

$\boxed{d_{new}=d_{old}+b^2(2x+3)}$ ➔ *ثابت دوم (بر حسب ثابت اول)*

اگر $d>0$ و P_2 انتخاب شود:

$$mid(P_{21},P_{22})=\left(\frac{(x+2)+(x+2)}{2},\frac{(y-1)+(y-2)}{2}\right)=\left(x+2,y-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$f(midx,midy)=b^2(x+2)^2+a^2\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2-a^2b^2$$

$$=b^2\big((x+1)+1\big)^2+a^2\left(\left(y-\tfrac{1}{2}\right)-1\right)^2-a^2b^2$$

$$=\underbrace{b^2(x+1)^2}+b^2(2(x+1)+1)+\underbrace{a^2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2}-a^2\left(2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)-1\right)\underbrace{-a^2b^2}$$

$$=d_{old}+b^2(2x+3)-a^2(2y-2)$$

$\boxed{d_{new}=d_{old}+b^2(2x+3)-2a^2(y-1)}$ ➔ *ثابت سوم (بر حسب ثابت اول)*

$$d=b^2(x+1)^2+a^2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2-a^2b^2$$

$$=\underbrace{b^2x^2}+2b^2x+b^2\underbrace{+a^2y^2}+a^2\left(-y+\frac{1}{4}\right)\underbrace{-a^2b^2}$$

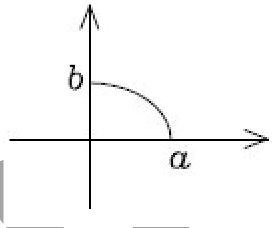
$$d=f(x,y)+b^2(2x+1)+a^2(-y+\tfrac{1}{4})$$

$f(x,y)=0$ ➔ $d=b^2(2x+1)+a^2(-y+\tfrac{1}{4})$

$$d=f(0,b)=b^2(2(0)+1)+a^2\left(-b+\tfrac{1}{4}\right)=b^2-a^2(+b-\tfrac{1}{4})$$

صرف نظر از $\frac{1}{4}$ ➔ $\boxed{d=b^2-a^2b}$ ➔ *ثابت اول*

الگوریتم برزنهام رسم بیضی:




```
void BresenHamCircle(int xCenter, int yCenter, int a, int b)
{
int x,y,d;
x=0;
y=b;
d=(b*b)-(a*a)*b;   //ثابت اول
plot-4points(x,y,xCenter,yCenter);
while(y>=0)
{
 if(d>0)   //  یعنی P2 انتخاب شود
 {
  d=d+(b*b)*(2*x+3)-2(a*a)*(y-1);   //ثابت سوم
  x++;
  y--;
 }
 else //  یعنی P1 انتخاب شود
 {
  d=d+(b*b)*(2*x+3);   //ثابت دوم
  x++;
 }
 plot-4points(x,y,xCenter,yCenter);
} //end of while loop.
} //end of function.

void plot-4points(int x, int y, int xCenter, int yCenter)
{
 setpixel(x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(x+xCenter,-y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,y+yCenter);
 setpixel(-x+xCenter,-y+yCenter);
} //end of function.
```

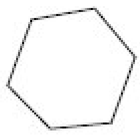
چند ضلعی محدب:

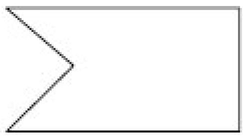
۱) زوایای داخلی کمتر از ۱۸۰ درجه است.
۲) اگر یکی از اضلاع را از دو طرف ادامه دهیم، همه‌ی چندضلعی در یک طرف آن قرار دارد.
۳) اگر هر دو نقطه‌ی دلخواه درون چندضلعی را با خطی به هم وصل کنیم، تمام خط داخل چند ضلعی قرار دارد.

چند ضلعی غیرمحدب:

چند ضلعی اگر محدب نباشد، مقعر(غیرمحدب) است.

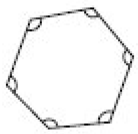
مثال: بررسی کنید آیا این دو شکل محدب می‌باشند یا مقعر؟

الف) 

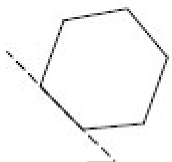
ب) 

بررسی شکل "الف":

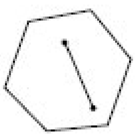
طبق تعریف ۱) زوایای داخلی کمتر از ۱۸۰ درجه است.



طبق تعریف ۲) اگر یکی از اضلاع را از دو طرف ادامه دهیم، همه‌ی چندضلعی در یک طرف آن قرار دارد.

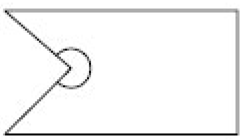


طبق تعریف ۳) اگر هر دو نقطه‌ی دلخواه درون چندضلعی را با خطی به هم وصل کنیم، تمام خط داخل چند ضلعی قرار دارد.

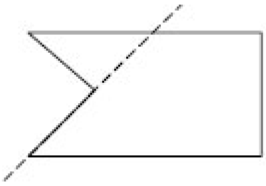


بررسی شکل "ب":

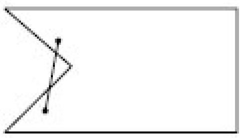
طبق تعریف ۱) زوایای داخلی کمتر از ۱۸۰ درجه است.



طبق تعریف ۲) اگر یکی از اضلاع را از دو طرف ادامه دهیم، همه‌ی چندضلعی در یک طرف آن قرار ندارد.



طبق تعریف ۳) اگر هر دو نقطه‌ی دلخواه درون چندضلعی را با خطی به هم وصل کنیم، تمام خط داخل چند ضلعی قرار ندارد.



نتیجه: شکل ***الف*** محدب و شکل ***ب*** مقعر است.

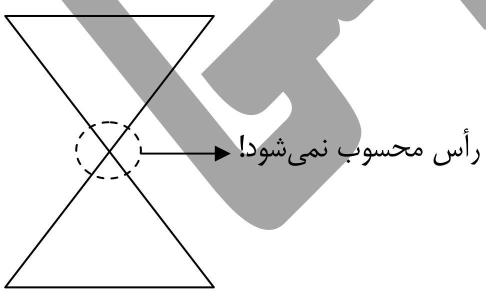
نکته: از بین ۳ تعریف موجود برای بررسی محدب بودن چندضلعی، تعریف ۳ کامل‌ترین است.

(به عبارت دیگر: احتمال خطا در تعریف‌های ۱ و ۲ وجود دارد، اما تعریف ۳ همیشه نتیجه درست را برمی‌گرداند.)

نکته: ساختمان داده‌ی مورد استفاده برای چندضلعی‌ها، لیست پیوندی (Linked List) یا آرایه می باشد؛ که رئوس چندضلعی ذخیره می‌شود. (ترتیب مهم است!)

نکته: محل تلاقی دو ضلع برابر است با رأس.

چندضلعی خود متقاطع:



- فقط در کامپیوتر اتفاق می‌افتد(وقتی که ترتیب رئوس رعایت نشود!).
- دو ضلع همدیگر ار قطع می‌کنند، ولی رأس محسوب نمیشود.

فصل ٦

تبدیلات خطی:

۱) انعکاس (تقارن)
۲) مقیاس
۳) دوران
۴) انتقال

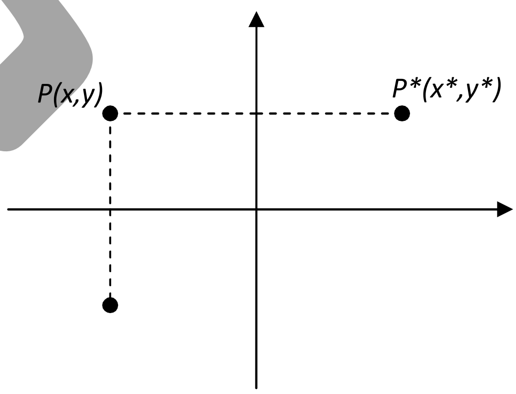
$\left.\begin{array}{l}\text{۳) دوران}\\ \text{۴) انتقال}\end{array}\right\}$ مهم

علت خطی بودن: زیرا یک خط پس از این تبدیلات همچنان خط باقی می‌ماند.

- از ماتریس استفاده خواهیم کرد.
- در حد نقطه و در فضای ۲ بعدی بررسی خواهیم کرد.

$$P(x,y) \xrightarrow{\text{تبدیلات خطی}} P(x^*,y^*)$$

انعکاس (تقارن):



$$[x \quad y]_{1\times 2} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times\ldots}$$

برای اینکه بتوانیم دو ماتریس را به هم ضرب کنیم، باید تعداد ستون ماتریس اول با تعداد سطر ماتریس دوم برابر باشند.

انعکاس نسبت به محور *y* ها:

$$[x \quad y]_{1\times 2} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = [-x + y(0) \quad x(0) + y] = [-x \quad y]$$

انعکاس نسبت به محور *x* ها:

$$[x \quad y]_{1\times 2} \times \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = [+x + y(0) \quad x(0) - y] = [x \quad -y]$$

مقیاس:

- انعکاس نوعی مقیاس است!

$$[a \quad b]_{1\times 2} \times \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}_{2\times 2} = [ac + b(0) \quad a(0) + bd]_{1\times 2} = [ac \quad bd]_{1\times 2}$$

- اگر $c = d = 1$ انگاه خود نقطه می‌شود.

$c > 1$ نقطه در راستای محور xها افزایش یافته است.
$d > 1$ نقطه در راستای محور yها افزایش یافته است.

$0 < c < 1$ نقطه در راستای محور xها کاهش یافته است.
$0 < d < 1$ نقطه در راستای محور yها کاهش یافته است.

$c < 0$ نقطه در راستای محور xها هم کاهش و هم انعکاس یافته است.
$d < 0$ نقطه در راستای محور yها هم کاهش و هم انعکاس یافته است.

$c = d$ مقیاس یکنواخت.
$c \neq d$ مقیاس غیریکنواخت.

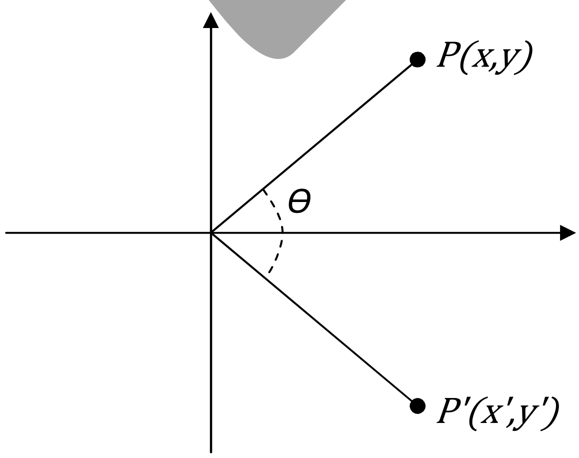
دوران:

- باید نسبت به یک زاویه باشد.

ماتریس دوران به اندازه θ :

$$[a \quad b]_{1\times 2} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}_{2\times 2} = [aCos\theta - bSin\theta \quad bSin\theta + bCos\theta]_{1\times 2}$$

- مرکز دوران مبدأ مختصات می‌باشد!



انتقال:

برای انتقال نقطه باید از ماتریس ۳×۳ استفاده کنیم؛ به این صورت:

$$[x \quad y \quad 1]_{1\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & k & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} = [x+m \quad y+k \quad 1]_{1\times3}$$

خودمان اضافه می‌کنیم!

چرا از ماتریس ۳×۳ استفاده کردیم؟

اگر از ماتریس ۲×۲ استفاده کنیم داریم:

$$[x \quad y]_{1\times2} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2} = [x+m \quad y]_{1\times2}$$

حال ماتریس انتقال را برای ۲×۲ بدست می‌آوریم:

- برای اینکار طرفین معادله را برابر قرار می‌دهیم!
- اعضای غیرقطری باید صفر شود، یعنی: *b=c=0*

پس داریم:

$$[ax+yc \quad bx+yd] = [x+m \quad y]$$

$$ax+yc = x+m \xrightarrow{c=0} ax = x+m \rightarrow a = \frac{x+m}{x}$$

$$bx+yd = y \xrightarrow{b=0} yd = y \rightarrow d = 1$$

یعنی داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{x+m}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ➔ *ماتریس انتقال نباید به ورودی بستگی داشته باشد، پس این ماتریس غلط است!*

مثال: می‌خواهیم چند ضلعی زیر را ۲ واحد در راستای محور xها و ۱ واحد در راستای محور yها انتقال دهیم، مختصات جدید را بیابید.

A(1,1)   B(3,1)   C(2,2)   D(1.5,3) ➔ *رئوس چندضلعی*

جواب:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{4\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3.5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{array}$$

A'(3,2)   B'(5,2)   C'(4,3)   D'(3.5,4) ➔ *رئوس چندضلعی بعد از انتقال*

ترکیب دوران و انتقال

مثال: اگر بخواهیم ابتدا این شکل را به اندازه θ درجه حول محور مختصات دوران دهیم و سپس به اندازه‌ی m واحد در جهت محور xها انتقال دهیم، ماتریس را بدست آورید.

جواب:

$$\begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sin}\theta & 0 \\ -\text{Sin}\theta & \text{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sin}\theta & 0 \\ -\text{Sin}\theta & \text{Cos}\theta & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

دوران حول نقطه‌ی دلخواه:

۱) نقطه‌ی دلخواه را به مبدأ مختصات انتقال می‌دهیم. $P(x_0, y_0) \rightarrow P'(0,0)$

۲) دوران را انجام می‌دهیم.

۳) نقطه را از مبدأ به مختصات اولیه انتقال می‌دهیم. $P'(0,0) \rightarrow P(x_0, y_0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sin}\theta & 0 \\ -\text{Sin}\theta & \text{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sin}\theta & 0 \\ -\text{Sin}\theta & \text{Cos}\theta & 0 \\ -x_0\text{Cos}\theta + y_0\text{Sin}\theta + x_0 & -x_0\text{Sin}\theta - y_0\text{Cos}\theta + y_0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

تمرین: چندضلعی زیر را حول نقطه‌ی *B* دوران دهید. ($\theta = \frac{\pi}{4}$)

رئوس چندضلعی ➔ *A(1,1)   B(2,1)   C(2,2)   D(1,2)*

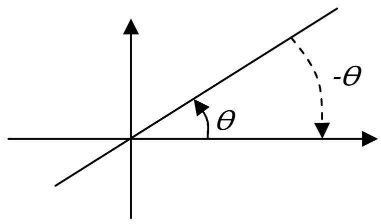
انعکاس نسبت به یک خط دلخواه:

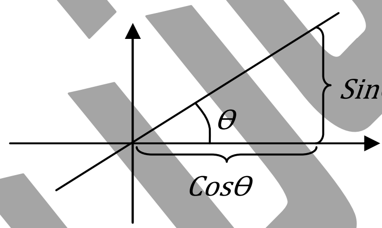
۱) خط را به مبدأ مختصات انتقال می‌دهیم.

$$ax + by + c = 0$$
$$by = -c - ax$$
$$y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{b} = \text{شیب} \longleftarrow tan\theta = -\frac{a}{b} \\ -\frac{c}{b} = \text{عرض از مبدأ} \longleftarrow \text{ارتفاع خط از مبدأ} \end{cases}$$

$$\left(0, -\frac{c}{b}\right) \rightarrow (0,0)$$

۲) خط به اندازه‌ی زاویه‌ی باید دوران یابد تا روی محور xها بیافتد.





۳) انعکاس نقطه را نسبت به xها انجام می‌دهیم.

۴) دوران را برمی‌گردانیم. (عکس مرحله ۲)

۵) انتقال را برمی‌گردانیم. (عکس مرحله ۱)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +\frac{c}{b} & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} Cos\theta & -Sin\theta & 0 \\ Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} Cos\theta & Sin\theta & 0 \\ -Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{b} & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} Cos^2\theta - Sin^2\theta & 2Cos\theta Sin\theta & 0 \\ 2Cos\theta Sin\theta & Sin^2\theta - Cos^2\theta & 0 \\ 2\frac{c}{b}Sin\theta Cos\theta & \frac{c}{b}(Sin^2\theta - Cos^2\theta - 1) & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

برای راحتی در محاسبه ماتریس بالا را ساده‌تر میکنیم:

$$tan\theta = -\frac{a}{b}$$
$$tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = -\frac{a}{b}$$

$Sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ➔ $Sin^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2}$

$Cos\theta = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ➔ $Cos^2\theta = \frac{b^2}{a^2+b^2}$

ماتریس ساده شده برابر است با:

$$= \begin{bmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} & 0 \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & 0 \\ \frac{-2ac}{a^2+b^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2} & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

تهیه و تنظیم: پیمان نعیمی

دی‌ماه ۱۳۹۰

این فایل فقط جهت کمک به دانشجویان عزیز آماده و نشر شده است، و مرجع نمی‌باشد؛

احتمال ایراد تایپی وجود دارد!